E.N.S. ULM-SEVRES session 1987

GROUPE A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 6 heures

Les candidats sont invités à lire l'énoncé attentivement. Lors de la correction, il sera tenu compte de la qualité et de la précision de la rédaction. On justifiera les réponses aux questions soit par des démonstrations soit par la construction de contre-exemples.

Dans tout le problème, E désigne l'ensemble des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un intervalle ouvert borné I avec :

i. $f = 0$ dans $\mathbb{R} \setminus I$;

ii. $f > 0$ dans I;

iii. f est de classe C^1 sur I.

On désigne par S l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que f' ne s'annule qu'en un seul point de $I = \{ x \in \mathbb{R}; f(x) > 0 \}$.

Pour $f \in S$, on notera de façon générale dans la suite :

$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} ; f(x) > 0 \} = I$

$]a, c[= \{ x \in \mathbb{R} ; f'(x) > 0 \}$ $\quad (a < c < b)$

$M = f(c) = \underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, f$

$R = (b - a) / 2$.

Étant donné $f \in S$, pour tout $y \in]0, M[$, l'ensemble $\{ x \in [a, b] ; f(x) \geqslant y \}$ est un segment que l'on désignera par $[a(y), b(y)]$.

On pose $a(0) = a$, $b(0) = b$ et $a(M) = b(M) = c$.

Ainsi, $a \leqslant a(y) \leqslant c \leqslant b(y) \leqslant b$, $\forall y \in [0, M]$.

Pour tout $y \in [0, M]$ on pose :

$$L(y) = b(y) - a(y)$$

I

Dans toute cette section on suppose que $f \in S$ et on utilise les notations précédentes.

I.1. Montrer qu'il existe une fonction unique f^* définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

i. Pour tout $r \in [-R, R]$, $f^*(r) = y$ si et seulement si $L(y) = 2|r|$.

ii. $f^*(r) = 0$ si $|r| \geqslant R$.

I.2. *a.* La fonction f^* est-elle dans la classe E?

b. Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, f^* l'est-elle aussi?

I.3. On suppose en outre, dans cette question seulement, que f est de classe C^k sur I, $f^{(k)}(c) \neq 0$ et que $f'(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0$.

Déterminer des équivalents de $L(y)$ et de $L'(y)$ lorsque y tend vers M par valeurs inférieures de la forme $\lambda (M - y)^\alpha$ avec $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$.

I.4. Est-il vrai que pour tout $f \in S$ et $\lambda > 0$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$?

I.5. L'une des trois relations suivantes est-elle nécessairement vérifiée pour toutes fonctions $f, g \in S$ telles que $f + g \in S$?

a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^*(x) + g^*(x) \leqslant (f + g)^*(x)$

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^*(x) + g^*(x) \geqslant (f + g)^*(x)$

c. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^*(x) + g^*(x) = (f + g)^*(x)$.

Dans la suite, on désigne par T ($\supset$ S) l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de $I = \{ x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \}$.

De façon générale, à nouveau, on notera, pour $f \in T$:

$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} ; f(x) > 0 \}$, $R = (b - a) / 2$,

$\{ x \in]a, b[; f'(x) = 0 \} = \{ c_1, \ldots, c_p \}$

avec $a < c_1 < \ldots < c_p < b$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $M = \underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, f$.

Tournez la page S. V. P.

Soit $f \in T$, pour $y \in]0, M[$ l'ensemble $\{ x \in [a, b] ; f(x) \geqslant y \}$ est formé d'un nombre fini de segments disjoints que l'on notera $[a_1(y), b_1(y)], \ldots, [a_k(y), b_k(y)]$ avec :

$$a < a_1(y) \leqslant b_1(y) < a_2(y) \leqslant b_2(y) < \ldots \leqslant b_k(y) < b.$$

($k \geqslant 1$ dépend de y). Dans ce cas, on pose :

$$L(y) = \sum_{j=1}^{k} (b_j(y) - a_j(y))$$

et $L(0) = b - a$, $L(M) = 0$.

On définit f^* à partir de $f \in T$ à l'aide de L de la même façon que pour $f \in S$ (voir I.1.)

II

On considère ici des fonctions $f \in T$.

II.1. Vérifier (brièvement) que f^* est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

II.2. Caractériser les points où la dérivée de f^*, notée Df^*, admet des discontinuités et indiquer de quel type sont ces discontinuités. (On pourra envisager dans un premier temps le cas où $p = 3$ (voir la définition de T).)

Dans toute la suite, la notation $\int f$ désigne l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

III

III.1. Soit f une fonction de S. Exprimer $\int f \left(= \int_a^b f(x)\, dx \right)$ sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction L.

III.2. Comparer, pour $f \in S$, $\int f$ et $\int f^*$.

III.3. Soit F une fonction continue quelconque sur $\mathbb{R}_+$ ($F \in C^0(\mathbb{R}_+)$), telle que $F(0) = 0$. Comparer $\int F \circ f$ et $\int F \circ f^*$, pour tout $f \in S$.

III.4. Comparer $\int F \circ f$ et $\int F \circ f^*$ pour tout $f \in T$. (Si on le juge utile, on pourra comparer dans un premier temps $\int f$ et $\int f^*$ pour tout $f \in T$.)

III.5. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les fonctions f et g de la classe T (exprimée à l'aide de f^* et de g^*) pour que :

$$\int F \circ f = \int F \circ g$$

quelle que soit $F \in C^0(\mathbb{R}_+)$.

(On pourra, si l'on veut, étudier d'abord le cas $f, g \in S$.)

III.6. L'une des deux relations suivantes est-elle vérifiée pour toute $f \in S$ telle que $b = -a = R$ et pour tout $\alpha \in]0, R]$?

a. $$\int_{-\alpha}^{\alpha} f^*(x)\, dx \geqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx.$$

b. $$\int_{-\alpha}^{\alpha} f^*(x)\, dx \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx.$$

La dérivée d'une fonction f sera notée Df dans la suite.

IV

IV.1. Pour $f \in S$, calculer $\int |Df|$ et $\int |Df^*|$.

IV.2. Pour $f \in T$ arbitraire, comparer $\int |Df|$ et $\int |Df^*|$.

IV.3. Soit $f \in S$. Exprimer $\int (Df)^2$ en terme d'une intégrale faisant intervenir les fonctions $a(y)$ et $b(y)$.

IV.4. Pour tout $f \in S$, comparer $\int (Df)^2$ et $\int (Df^*)^2$.

IV.5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f \in S$ pour que l'on ait

$$\int (Df)^2 = \int (Df^*)^2.$$

Tournez la page S. V. P.

IV.6. *a.* Pour $f \in T$, comparer $\int (Df)^2$ et $\int (Df^*)^2$.

b. Dans quel cas ces deux intégrales sont-elles égales ?

IV.7. Formuler une condition générale (sous la forme la plus simple possible) sur la fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, paire et telle que $F(0) = 0$ pour que l'on ait :

$$\int F(Df^*) \leqslant \int F(Df)$$

pour toute fonction $f \in T$ (ou, si l'on veut, dans un premier temps, pour toute $f \in S$).

IV.8. Établir une condition *nécessaire* et suffisante sur la fonction paire et continue F (ou, pour commencer, $F \in C^2(\mathbb{R})$) telle que $F(0) = 0$, pour que l'ont ait :

$$\int F(Df^*) \leqslant \int F(Df) \qquad \text{pour toute } f \in T.$$

IV.9. Comparer $\int \sqrt{1 + (Df^*)^2}$ et $\int \sqrt{1 + (Df)^2}$ et étudier les cas d'égalité.

V

V.1. Comparer $\int fg$ et $\int f^* g^*$ pour des fonctions arbitraires $f, g \in S$. (On pourra utiliser une approximation de f et g par des suites de fonctions en escalier f_n et g_n pour lesquelles on *définira* précisément des fonctions en escalier associées f_n^* et g_n^*.)

V.2. Étudier les cas d'égalité de ces intégrales.

V.3. Mêmes questions pour des fonctions arbitraires $f, g \in T$.

V.4. On pose $\| f \|_\infty = \operatorname{Sup}_{x \in \mathbb{R}} | f(x) |$. Pour toutes fonctions $f, g \in T$, comparer $\| f - g \|_\infty$ et $\| f^* - g^* \|_\infty$.